



TITLE:

環のcross-sectionについて(半群・形式言語と計算機システム)

AUTHOR(S):

松岡, 学

CITATION:

松岡, 学. 環のcross-sectionについて(半群・形式言語と計算機システム). 数理解析研究所講究録 1996, 960: 125-134

ISSUE DATE:

1996-08

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/60500>

RIGHT:

環の cross-section について

名古屋大多元数理 松岡 学 (Manabu Matsuoka)

R を環、 I をそのイデアル、 $A := R/I$ を剰余環、 $\pi: R \rightarrow A$ を自然な準同型写像とする。 $h: A \rightarrow R$: 環準同型写像で、 $\pi \circ h = \text{id}_A$ を満す時、 h を section という。この時、

$$\begin{aligned} \tau: A \oplus I &\longrightarrow R \\ (\alpha, x) &\longmapsto h(\alpha) + x \end{aligned}$$

は全単射であるが、

$$\begin{cases} \tau((\alpha, x) \cdot (\beta, y)) = h(\alpha\beta) + xy \\ \tau(\alpha, x) \cdot \tau(\beta, y) = h(\alpha)h(\beta) + xh(\beta) + h(\alpha)y + xy \end{cases}$$

より、和は保つが積は必ずしも保たない。しかし、 $A \oplus I$ に積を

$$(\alpha, x) \cdot (\beta, y) := (\alpha\beta, xh(\beta) + h(\alpha)y + xy)$$

で入れ直すと、 $A \oplus I$ は環構造をもち、上の τ は和、積、共に保つようになる。つまり、 τ は環同型写像となる。

今回の目的は、このような状況を cross-section の場合に

一般化して考察することである。

§ 1 Everett sum

さき程のことから、 K, N を環とするとき直積集合 $K \times N$ にどのような環構造を与えるかが重要となる。このことに関して、C. J. Everett は [1] において、1つの構成法を与えている。この章では、この Everett による構成法を紹介する。

N を環とする。 $E_1(N)$ を N 自身を右 N -module と見なした時の endomorphism ring とし、 $E_2(N)$ を N 自身を左 N -module と見なした時の endomorphism ring とする。 $E'(N) := E_1(N) \oplus E_2(N)$ をアーベル群としての直和とし、 $E'(N)$ に積を次のように与える。

$$(\phi', \phi^2) \cdot (\psi', \psi^2) = (\phi' \circ \psi', \psi^2 \circ \phi^2) \quad ; (\phi', \phi^2), (\psi', \psi^2) \in E'(N)$$

この積に関して $E'(N)$ は環の構造をもつ。

定義 $E'(N)$ の元 $\phi = (\phi', \phi^2)$ は、次の (i) (ii) を満す時、 N の double homothetism と呼ばれる。

$$(i) \quad x \cdot \phi'(y) = \phi^2(x) \cdot y$$

$$(ii) \quad \phi'(\phi^2(x)) = \phi^2(\phi'(x)) \quad (x, y \in N)$$

N の double homothetism 全体を $DH(N)$ で表す。

定義 K, N を環とする。2つの写像

$$[,] : K \times K \longrightarrow N \quad \text{と} \quad d : K \longrightarrow DH(N)$$

$$(\alpha, \beta) \longmapsto [\alpha, \beta] \quad \alpha \longmapsto d_\alpha = (d'_\alpha, d''_\alpha)$$

が次の10個の条件を満たす時、 $([.,.], d)$ を E-couple for K and N と呼ぶ。

- (1) $[\alpha, \beta] = [\beta, \alpha]$
- (2) $[\alpha, \beta] + [\alpha + \beta, \tau] = [\alpha, \beta + \tau] + [\beta, \tau]$
- (3) $[0, \alpha] = 0$
- (4) $d_{\alpha+\beta}' \chi + [\alpha, \beta] \chi = d_{\alpha}' \chi + d_{\beta}' \chi$
- (5) $d_{\alpha+\beta}^2 \chi + \chi [\alpha, \beta] = d_{\alpha}^2 \chi + d_{\beta}^2 \chi$
- (6) $d_r'([\alpha, \beta]) = [r\alpha, r\beta]$
- (7) $d_r^2([\alpha, \beta]) = [\alpha r, \beta r]$
- (8) $d_{\alpha}'(d_{\beta}^2 \chi) = d_{\beta}^2(d_{\alpha}' \chi)$
- (9) $d_0' \chi = d_0^2 \chi = 0$
- (10) $d_{\alpha\beta} = d_{\alpha} d_{\beta} \quad (\alpha, \beta, r \in K, \chi \in N)$

定理1. K, N を環、 $([.,.], d)$ を E-couple for K and N とする。
この時、直積集合 $K \times N$ に次のように演算を定めることにより、
 $K \times N$ は環の構造をもつ

$$(\alpha, \chi) + (\beta, \gamma) = (\alpha + \beta, [\alpha, \beta] + \chi + \gamma)$$

$$(\alpha, \chi) \cdot (\beta, \gamma) = (\alpha \cdot \beta, d_{\alpha}' \gamma + d_{\beta}^2 \chi + \chi \gamma)$$

この環を $K \cdot N_{([.,.], d)}$ で表し、 K と N の $([.,.], d)$ に関する Everett sum と呼ぶ。

証明

この $+$, \cdot が環の公理を満たすことは、E-couple の 10 個の条件から分かる。

(証終)

embedding $l: N \longrightarrow K \cdot N_{(c, \gamma, d)}$, $x \mapsto (0, x)$ によって, N は $K \cdot N_{(c, \gamma, d)}$ のイデアルと見なされる。 $\pi: K \cdot N_{(c, \gamma, d)} \longrightarrow K$, $(\alpha, x) \mapsto \alpha$ とすれば,

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{l} K \cdot N_{(c, \gamma, d)} \xrightarrow{\pi} K \longrightarrow 0$$

は環の完全系列である。

§ 2 cross-section と Everett sum の関係

定義 R を環、 I を R のイデアル、 $A = R/I$ とし、 $\pi: R \rightarrow A$ を natural homomorphism とする。写像 $f: A \rightarrow R$ が

$$(i) f(0) = 0 \quad (ii) f(ab) = f(a)f(b) \quad (iii) \pi \circ f = id_A$$

を満たす時、 f を A から R への cross-section という。

定理 2. R を環、 I を R のイデアル、 $A = R/I$ とする。

$f: A \rightarrow R$: cross-section が存在するための必要十分条件はある E-couple (l, γ, d) for A and I と 次の図式を可換にする $\forall: A \cdot I_{(c, \gamma, d)} \longrightarrow R$: 環同型写像 が存在することである。

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & A \cdot I_{(\ell, \gamma, d)} & \longrightarrow & A \longrightarrow 0 \\
& & \downarrow \text{id} & & \downarrow \nabla & & \downarrow \text{id} \\
0 & \longrightarrow & I & \longrightarrow & R & \longrightarrow & A \longrightarrow 0
\end{array}$$

証明 ある E-couple (ℓ, γ, d) for A and I と上の図式を可換にする同型写像 $\nabla: A \cdot I_{(\ell, \gamma, d)} \longrightarrow R$ が存在したとする。この時、 $f: A \longrightarrow R$ を $f(\alpha) = \nabla(\alpha, 0)$ と定めると、この f は cross-section となる。

逆に、cross-section $f: A \longrightarrow R$ が存在したとする。この時、写像 $[\cdot, \cdot]: A \times A \longrightarrow I$ を $[\alpha, \beta] = f(\alpha) + f(\beta) - f(\alpha + \beta)$ によって写像 $d: A \longrightarrow DH(I)$ を $d_\alpha = (d'_\alpha, d''_\alpha)$, $d'_\alpha \chi = f(\alpha)\chi$, $d''_\alpha \chi = \chi f(\alpha)$ ($\alpha, \beta \in A, \chi \in I$) によって定めると、10個の条件を満たし、 (ℓ, γ, d) は E-couple for A and I となる。

又、 $\nabla: A \cdot I_{(\ell, \gamma, d)} \longrightarrow R$ を $\nabla(\alpha, \chi) = f(\alpha) + \chi$ で定めると、この ∇ は、上の図式を可換にする環同型写像となる。(証終)

cross-section $f: A \longrightarrow R$ を Everett sum $A \cdot I_{(\ell, \gamma, d)}$ によって特徴づけることができる、という事がこの定理から分かる。

§3 cross-section の extension

R^* は環、 R はその部分環とする。 I^* は R^* のイデアル、

I は R のイデアルで $I = I^* \cap R$ とする。この時、自然に $A = R/I$ は $A^* = R^*/I^*$ の部分環と見なされる。以下において、このような R^*, R, I^*, I, A^*, A を固定しておく。

定義 $f: A \rightarrow R$ を cross-section とする。cross-section $f^*: A^* \rightarrow R^*$ で $f^*|_A = f$ となる f^* を f の extension という。

定義 $([,], d)$ を E-couple for A and I 、 $([,]^*, d^*)$ を E-couple for A^* and I^* とする。 $([,]^*, d^*)$ が $([,], d)$ の extension とは、

$$(i) \quad [,]^*: A^* \times A^* \rightarrow I^*, \quad [,]: A \times A \rightarrow I$$

$$[,]^*|_{A \times A} = [,]$$

$$(ii) \quad d_\alpha^* = (d_\alpha^{*1}, d_\alpha^{*2}), \quad d_\alpha = (d_\alpha^1, d_\alpha^2)$$

任意の $\alpha \in A$ に対して $d_\alpha^{*1}|_I = d_\alpha^1$ 、 $d_\alpha^{*2}|_I = d_\alpha^2$ となることをいう。

$([,]^*, d^*)$ が $([,], d)$ の extension であるとき、injection $A \cdot I_{([,], d)} \rightarrow A^* \cdot I_{([,]^*, d^*)}^*$, $(\alpha, x) \mapsto (\alpha, x)$ によって、 $A \cdot I_{([,], d)}$ を $A^* \cdot I_{([,]^*, d^*)}^*$ の部分環と見なすことができる。

cross-section の extension が E-couple の extension によって特徴づけられることが次の定理から分かる。

定理3. $f: A \rightarrow R$ を cross-section とし、 $([,], d)$ を定理2

のように定められた E-couple for A and I とする。

cross-section $f^*: A^* \rightarrow R^*$ で f の extension であるものが存在するための必要十分条件は、 (L, J, d) の extension である E-couple (L, J^*, d^*) for A^* and I^* と 次の図式を可換にする環同型写像 $\nabla^*: A^* \cdot I_{(L, J^*, d^*)}^* \rightarrow R^*$ で、任意の $\alpha \in A$ に対して $\nabla^*(\alpha, 0) = f(\alpha)$ となるものが存在することである。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & A^* \cdot I_{(L, J^*, d^*)}^* & \longrightarrow & A^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \nabla^* & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & R^* & \longrightarrow & A^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

証明 $f^*: A^* \rightarrow R^*$ を f の extension である cross-section とする。

この時、

$$\begin{cases} [\alpha, \beta]^* = f^*(\alpha) + f^*(\beta) - f^*(\alpha + \beta) & \alpha, \beta \in A^* \\ d_{\alpha}^{*1} \chi = f^*(\alpha) \chi, \quad d_{\alpha}^{*2} \chi = \chi f^*(\alpha) & \alpha \in A^*, \chi \in I^* \end{cases}$$

によって (L, J^*, d^*) を定めると、これは (L, J, d) の extension である。 $\nabla^*: A^* \cdot I_{(L, J^*, d^*)}^* \rightarrow R^*$ を $\nabla^*(\alpha, \chi) = f^*(\alpha) + \chi$ で定めれば、 ∇^* は上の図式を可換にする環同型写像となる。

又、任意の $\alpha \in A$ に対して、 $\nabla^*(\alpha, 0) = f^*(\alpha) = f(\alpha)$

逆に、 (L, J, d) の extension である E-couple (L, J^*, d^*) for A^* and I^* と上の図式を可換にする環同型写像 $\nabla^*: A^* \cdot I_{(L, J^*, d^*)}^* \rightarrow R^*$ で任意の $\alpha \in A$ に対して $\nabla^*(\alpha, 0) = f(\alpha)$ となるものがあるとする。このとき、 $f^*: A^* \rightarrow R^*$ を $f^*(\alpha) = \nabla^*(\alpha, 0)$ と

定めると、 f^* は A^* から R^* への cross-section になる。任意の $\alpha \in A$ に対して、 $f^*(\alpha) = \sigma^*(\alpha, 0) = f(\alpha)$ なので、 f^* は f の extension である。 (証終)

E-couple $e = (\mathcal{L}, \mathcal{J}, d)$ の extension に対して、e-equivalent という概念を導入しておく。

定義 $e = (\mathcal{L}, \mathcal{J}, d)$ を E-couple for A and I とし、 $(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*, d^*)$ 、 $(\mathcal{L}, \mathcal{J}^{**}, d^{**})$ を共に e の extension である E-couple for A^* and I^* とする。 $(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*, d^*)$ と $(\mathcal{L}, \mathcal{J}^{**}, d^{**})$ が e-equivalent であるとは、次の図式を可換にし、かつ $\mathcal{I}|_{A \cdot I_{(\mathcal{L}, \mathcal{J}, d)}} = \text{id}$ を満す環同型写像 $\mathcal{I}: A^* \cdot I_{(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*, d^*)}^* \longrightarrow A^* \cdot I_{(\mathcal{L}, \mathcal{J}^{**}, d^{**})}^*$ が存在することをいう。

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & A^* \cdot I_{(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*, d^*)}^* & \longrightarrow & A^* \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \mathcal{I} & & \downarrow \text{id} \\ 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & A^* \cdot I_{(\mathcal{L}, \mathcal{J}^{**}, d^{**})}^* & \longrightarrow & A^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

定理4. $f: A \rightarrow R$ を cross-section とし、 $(\mathcal{L}, \mathcal{J}, d)$ を定理2のように定められた E-couple for A and I とする。 f^*, g^* を共に f の extension である A^* から R^* への cross-section であるとする。 $(\mathcal{L}, \mathcal{J}^*, d^*)$ 、 $(\mathcal{L}, \mathcal{J}^{**}, d^{**})$ を共に次のように定められる $e = (\mathcal{L}, \mathcal{J}, d)$ の extension である E-couple for A^*

and I^* とする。

$$\begin{cases} [\alpha, \beta]^* = f^*(\alpha) + f^*(\beta) - f^*(\alpha + \beta) & (\alpha, \beta \in A^*) \\ d_{\alpha}^{*1} \chi = f^*(\alpha) \chi, \quad d_{\alpha}^{*2} \chi = \chi f^*(\alpha) & (\alpha \in A^*, \chi \in I^*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} [\alpha, \beta]^{**} = g^*(\alpha) + g^*(\beta) - g^*(\alpha + \beta) & (\alpha, \beta \in A^*) \\ d_{\alpha}^{**1} \chi = g^*(\alpha) \chi, \quad d_{\alpha}^{**2} \chi = \chi g^*(\alpha) & (\alpha \in A^*, \chi \in I^*) \end{cases}$$

この時、 $(\mathbb{L}, \mathbb{J}^*, d^*)$ と $(\mathbb{L}, \mathbb{J}^{**}, d^{**})$ は、e-equivalentである。

$$\begin{array}{ccccccc} \text{証明} & 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & A^* \cdot I_{(\mathbb{L}, \mathbb{J}^*, d^*)}^* & \longrightarrow A^* \longrightarrow 0 \\ & & & \downarrow \text{id} & & \downarrow \nabla^* & \downarrow \text{id} \\ & 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & R^* & \longrightarrow A^* \longrightarrow 0 \\ & & & \uparrow \text{id} & & \uparrow \nabla^{**} & \uparrow \text{id} \\ & 0 & \longrightarrow & I^* & \longrightarrow & A^* \cdot I_{(\mathbb{L}, \mathbb{J}^{**}, d^{**})}^* & \longrightarrow A^* \longrightarrow 0 \end{array}$$

のような可換図式が成り立つ。ここで、 ∇^* 、 ∇^{**} は、 $\nabla^*(\alpha, \chi) = f^*(\alpha) + \chi$ 、 $\nabla^{**}(\alpha, \chi) = g^*(\alpha) + \chi$ である。

又、任意の $(\alpha, \chi) \in A^* \cdot I_{(\mathbb{L}, \mathbb{J}, d)}$ に対して、 $\nabla^*(\alpha, \chi) = f^*(\alpha) + \chi = f(\alpha) + \chi = g^*(\alpha) + \chi = \nabla^{**}(\alpha, \chi)$ よって、環同型写像 $A^* \cdot I_{(\mathbb{L}, \mathbb{J}^*, d^*)}^* \longrightarrow A^* \cdot I_{(\mathbb{L}, \mathbb{J}^{**}, d^{**})}^*$ は $A^* \cdot I_{(\mathbb{L}, \mathbb{J}, d)}$ 上では不変である。
(証終)

この e-equivalent という概念は、cross-section の extension の一意性を議論する時に有益となるが、それらの事は、まだまだこれからの課題である。

References

[1] Everett, C. J. : An extension theory for rings, Amer. J. Math. 64 (1942), 363-370

[2] Rédei, L. : Algebra I, Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1959.

[3] Sumiyama, T. : On double homothetisms of rings and local rings with finite residue fields, Math. J. Okayama Univ. 33 (1991), 13-20